

Capítulo 1

Estructuras algebraicas

1.1 Operaciones. Concepto de grupo, anillo y cuerpo

Definición 1.1.1 Sea C un conjunto. Diremos, “provisionalmente”, que se ha definido una *operación interna* o una *ley de composición interna* sobre C , cuando se ha dado una “regla” que asocia a cada par de elementos de C un único elemento también de C . Es decir, llamamos operación o ley de composición interna sobre C a toda aplicación

$$*: C \times C \longrightarrow C.$$

Si $a, b \in C$ y $c = *(a, b)$, el elemento $c \in C$, imagen del par (a, b) por la aplicación $*$, será notado por $c = a * b$.

Definición 1.1.2 (CONCEPTO DE GRUPO). Sea G un conjunto no vacío y $*$ una ley de composición interna definida sobre G . Diremos que $(G, *)$ es un *grupo* si la citada operación verifica las siguientes propiedades:

G.1. ASOCIATIVA: $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$.

G.2. E. NEUTRO: $\exists e \in G \mid \forall a \in G, e * a = a * e = a$.

(Habitualmente, cuando la notación es *aditiva*, al elemento neutro del grupo se le llama *cero* y se le representa por 0 y, si es *multiplicativa* se le llama *uno* y se le representa por 1.)

G.3. ELEMENTO SIMÉTRICO: $\forall a \in G, \exists a' \in G \mid a' * a = a * a' = e$.

(Al igual que en el caso anterior, si la notación es *aditiva*, al elemento simétrico de a se le llama *opuesto* del elemento a y se le nota por $-a$ y, si es *multiplicativa* se le llama *inverso* de a y se le nota por a^{-1} .)

El grupo recibirá el nombre de *conmutativo* o *abeliano*, si además, dicha operación verifica la siguiente propiedad:

G.4. CONMUTATIVA: $\forall a, b \in G, a * b = b * a$.

De los conjuntos numéricos, son grupos aditivos $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ y son grupos multiplicativos $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Definición 1.1.3 CONCEPTO DE ANILLO Sea A un conjunto no vacío sobre el que hemos definido dos leyes de composición internas para las que utilizaremos la notación habitual $+$, \cdot , diremos que la terna $(A, +, \cdot)$ es un anillo, si dichas operaciones verifican las siguientes propiedades:

1. PROPIEDADES DE LA ADICIÓN

A.1. ASOCIATIVA: $\forall a, b, c \in A, (a + b) + c = a + (b + c)$.A.2. CONMUTATIVA: $\forall a, b \in A, a + b = b + a$.A.3. E. NEUTRO: $\exists 0 \in A \mid \forall a \in A, a + 0 = a$.A.4. ELEMENTO SIMÉTRICO: $\forall a \in A, \exists -a \in A \mid a + (-a) = 0$.

2. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

A.5. ASOCIATIVA: $\forall a, b, c \in A, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. RELACIÓN ENTRE AMBAS OPERACIONES

A.7. DISTRIBUTIVA: $\forall a, b, c \in A, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Si, además, la operación \cdot verifica alguna la propiedades

A.8. CONMUTATIVA: $\forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a$,A.9. E. NEUTRO: $\exists e \in A \mid \forall a \in A, e \cdot a = a \cdot e = a$,

el anillo recibe el nombre, respectivamente, de *anillo conmutativo* y/o *anillo con unidad*.

Son anillos conmutativos: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ (anillo de los números enteros y anillo de los polinomios en la indeterminada X con coeficientes en el cuerpo \mathbb{R} de los números reales).

Es un anillo no conmutativo $(\mathcal{M}(n \times n, K), +, \cdot)$ (conjunto de las matrices cuadradas de orden n sobre un cuerpo K con las operaciones adición y multiplicación de matrices).

Definición 1.1.4 CONCEPTO DE CUERPO Sea K un conjunto no vacío sobre el que hemos definido dos leyes de composición internas para las que utilizaremos la notación habitual $+$, \cdot , diremos que la terna $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo, si dichas operaciones verifican las siguientes propiedades:

1. PROPIEDADES DE LA ADICIÓN

K.1. ASOCIATIVA: $\forall a, b, c \in K, (a + b) + c = a + (b + c)$.K.2. CONMUTATIVA: $\forall a, b \in K, a + b = b + a$.K.3. E. NEUTRO: $\exists 0 \in K \mid \forall a \in K, a + 0 = a$.K.4. ELEMENTO SIMÉTRICO: $\forall a \in K, \exists -a \in K \mid a + (-a) = 0$.

2. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

K.5. ASOCIATIVA: $\forall a, b, c \in K, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.K.6. CONMUTATIVA: $\forall a, b \in K, a \cdot b = b \cdot a$.K.7. E. NEUTRO: $\exists 1 \in K \mid \forall a \in K, a \cdot 1 = a$.K.8. ELEMENTO SIMÉTRICO: $\forall a \in K \setminus \{0\}, \exists a^{-1} \in K \mid a \cdot a^{-1} = 1$.

3. RELACIÓN ENTRE AMBAS OPERACIONES

K.9. DISTRIBUTIVA: $\forall a, b, c \in K, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Nota Obsérvese que si $(K, +, \cdot)$ es un cuerpo, se verifica que:

- (a) $(K, +)$ es un grupo abeliano.
- (b) (K^*, \cdot) es un grupo abeliano, donde $K^* = K \setminus \{0\}$.
- (c) Ambas operaciones están relacionadas por la propiedad distributiva.

Son cuerpos: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Definición 1.1.5 Sean A y Ω conjuntos no vacíos al segundo de los cuales le llamaremos *conjunto de escalares*. Una *operación externa* o una *ley de composición externa* sobre A cuyo conjunto de escalares es Ω es toda “regla” que asocie a cada par de elementos, el primero de Ω y el segundo de A , un único elemento del conjunto A .

O bien, en términos de aplicaciones, llamamos *operación externa* o *ley de composición externa* sobre A cuyo conjunto de escalares es Ω a toda aplicación

$$\circ : \Omega \times A \longrightarrow A.$$

Si $(\alpha, x) \in \Omega \times A$, el elemento $c \in A$, imagen del par (α, x) por la aplicación \circ , será notado por $c = \alpha \circ x$.

Frecuentemente, a la ley \circ se le llama “multiplicación” y al elemento $c = \alpha \circ x$ se le llama “producto” de α por x .

Definición 1.1.6 (CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL) Sea V un conjunto no vacío (cuyos elementos los representaremos con letras minúsculas “negritas”) y K un cuerpo (cuyos elementos serán representados por caracteres griegos o latinos en minúsculas). Sobre V se definen dos leyes de composición, interna y externa que notaremos con los símbolos $+$ y \cdot , decimos que la terna $(V, +, \cdot, K)$ es un espacio vectorial sobre K o que es un K -espacio vectorial, si se verifica:

1. $(V, +)$ es grupo abeliano. Es decir; la operación $+$ tiene las siguientes propiedades:
 - E.1. ASOCIATIVA: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
 - E.2. CONMUTATIVA: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
 - E.3. E. NEUTRO: $\exists \mathbf{0} \in V \mid \forall \mathbf{a} \in V, \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.
 - E.4. ELEMENTO SIMÉTRICO: $\forall \mathbf{a} \in V, \exists -\mathbf{a} \in V \mid \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
2. Propiedades de la ley de composición externa (el elemento $\lambda \cdot \mathbf{x}$ se notará simplemente por $\lambda \mathbf{x}$).
 - E.5. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \mathbf{x} \in V (\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}$.
 - E.6. $\forall \lambda \in K \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$.
 - E.7. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \mathbf{x} \in V (\lambda(\mu \mathbf{x})) = (\lambda \mu)\mathbf{x}$.
 - E.8. $\forall \mathbf{x} \in V, 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (donde $1 \in K$ es el elemento neutro de la multiplicación de K).

Definición 1.1.7 Si V es un espacio vectorial sobre K , a los elementos de V se les llamará vectores y a los de K escalares.

Ejemplos Son espacios vectoriales:

- a) El conjunto $V = \{\mathbf{0}\}$ cuyo único elemento es el vector $\mathbf{0}$, tiene, respecto de la adición y la multiplicación por un elemento de K , estructura de espacio vectorial. Se le llama espacio vectorial trivial.

b) Sea $V(n)$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n en la indeterminada X , cuyos coeficientes son números reales. $(V(n), +, \cdot \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

c) $(\mathbb{C}, +, \cdot \mathbb{R})$, donde \mathbb{C} es el conjunto de los números complejos.

d) Sea $K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in K\}$, entonces $(K^n, +, \cdot K)$ es un espacio vectorial sobre K . Las operaciones adición y multiplicación por un escalar vienen definidas por las siguientes igualdades:

1. ADICIÓN

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

2. MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

e) $(\mathcal{M}(m \times n), +, \cdot K)$, donde $\mathcal{M}(m \times n)$ es el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ cuyos elementos pertenecen al cuerpo K .

Nota En todo lo que sigue supondremos que K es uno de los cuerpos \mathbb{Q} , \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Capítulo 2

Matrices, determinantes y sistemas

2.1 Matrices. Operaciones

Definición 2.1.1 Sea K un cuerpo. Llamamos matriz de orden $m \times n$ sobre K a una tabla de $m \times n$ elementos de K distribuidos en m filas y n columnas.

Utilizaremos letras mayúsculas para notar a las matrices y sus elementos serán notados por la correspondiente letra minúscula con doble subíndice al primero de los cuales se le llama *indicador de fila* y al segundo *indicador de columna*. Así, por ejemplo, si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden 3×4 sobre \mathbb{R} , escribiremos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Notaremos con los símbolos $\mathcal{M}(m \times n, K)$ al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ sobre K . Casos particulares

$m = 1$. La matriz A es de la forma

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

y recibe el nombre de matriz fila.

$n = 1$. La matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

y recibe el nombre de matriz columna.

$m = n$. Si el número de filas es igual al número de columnas a la matriz correspondiente se le llama matriz cuadrada. En este caso se suele decir simplemente que el orden de la matriz es n . Así, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

Como casos particulares:

- La matriz $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ es *diagonal* si $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$. Es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}.$$

- La matriz $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ es *triangular superior* (resp. *triangular inferior*) si $a_{ij} = 0 \forall i > j$ (resp. $a_{ij} = 0 \forall i < j$).

Definición 2.1.2 Sea $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de orden $m \times n$. Decimos que $A = B$ si y sólo si los elementos que ocupan la misma posición en A y en B son iguales. Simbólicamente:

$$A = B \iff \forall i, j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, a_{ij} = b_{ij}.$$

Definición 2.1.3 (ADICIÓN) Sean $A, B, C \in \mathcal{M}(m \times n, K)$. Decimos que $C = A + B$ si cada elemento que ocupe la posición (i, j) en la matriz C es la suma de los elementos que ocupan la posición (i, j) en las matrices A y B . Simbólicamente:

$$C = A + B \iff \forall i, j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Proposición 2.1.1 (PROPIEDADES) La operación adición definida sobre el conjunto $\mathcal{M}(m \times n, K)$, verifica las siguientes propiedades:

- G.I ASOCIATIVA. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}(m \times n, K), (A + B) + C = A + (B + C)$.
- G.II CONMUTATIVA. $\forall A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K), A + B = B + A$.
- G.III ELEMENTO NEUTRO. $\exists 0 \in \mathcal{M}(m \times n, K) \mid \forall A \in \mathcal{M}(m \times n, K), A + 0 = A$.
- G.IV E. SIMÉTRICO. $\forall A \in \mathcal{M}(m \times n, K), \exists (-A) \in \mathcal{M}(m \times n, K) \mid A + (-A) = 0$.

Demostración Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$.

- G.I ASOCIATIVA. $(A + B) + C = ((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = A + (B + C)$.
- G.II CONMUTATIVA. $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A$.
- G.III E. NEUTRO. La matriz $0 \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, llamada matriz *cero*, tal que todos sus elementos son iguales a cero, verifica que

$$A + 0 = (a_{ij}) + (0) = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = A.$$

- G.IV E. SIMÉTRICO. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, la matriz $-A = (-a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ verifica que

$$A + (-A) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} + (-a_{ij})) = (0) = 0.$$

La matriz $-A$ recibe el nombre de *opuesta* de la matriz a .

Consecuencia El conjunto $\mathcal{M}(m \times n, K)$ de las matrices de orden $m \times n$ con la operación adición de matrices tiene estructura de grupo abeliano. O, más brevemente, el par $(\mathcal{M}(m \times n, K), +)$ es un grupo abeliano.

Definición 2.1.4 (MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR) Dados el escalar $\alpha \in K$ y la matriz $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ llamamos αA a la matriz de orden $m \times n$ obtenida multiplicando los elementos de A por el escalar α . Simbólicamente:

$$B = \alpha A \iff \forall i, j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, b_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Proposición 2.1.2 (PROPIEDADES) Sean $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, se verifican las siguientes propiedades:

K.I $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

K.II $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

K.III $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

K.IV $1A = A$ (donde 1 es la identidad de K).

Demostración $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, se tiene que:

K.I $(\alpha + \beta)A = (\alpha + \beta)(a_{ij}) = ((\alpha + \beta)a_{ij}) = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = \alpha(a_{ij}) + \beta(a_{ij}) = \alpha A + \beta A$.

K.II $\alpha(A + B) = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = (\alpha(a_{ij} + b_{ij})) = (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\alpha b_{ij}) = \alpha(a_{ij}) + \alpha(b_{ij}) = \alpha A + \alpha B$.

K.III $\alpha(\beta A) = \alpha(\beta(a_{ij})) = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha(\beta a_{ij})) = ((\alpha\beta)a_{ij}) = (\alpha\beta)(a_{ij}) = (\alpha\beta)A$.

K.IV $1A = 1(a_{ij}) = (1a_{ij}) = (a_{ij}) = A$.

Consecuencia El conjunto de las matrices de orden $m \times n$ sobre K con las operaciones adición de matrices y multiplicación de un escalar por una matriz tiene estructura de espacio vectorial sobre K . O, más brevemente, la terna $(\mathcal{M}(m \times n, K), +, \cdot K)$ es un espacio vectorial sobre K .

Definición 2.1.5 Sean $A \in \mathcal{M}(m \times p, K)$ y $B \in \mathcal{M}(p \times n, K)$ dos matrices de órdenes respectivos $m \times p$ y $p \times n$ a cuyos elementos los designaremos, respectivamente, a_{ij} y b_{ij} . Decimos que la matriz $C = (c_{ij})$ es el producto de las matrices A y B si se verifican las siguientes condiciones:

1. $C \in \mathcal{M}(m \times n, K)$.

2. $\forall i, j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$.

Nótese que las matrices A y B son “multiplicables” si y sólo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B y que, por tanto, dos matrices cuadradas del mismo orden son “multiplicables” en cualquier orden.

Proposición 2.1.3 (PROPIEDADES) Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ tres matrices que, en cada caso, verifican las condiciones para que pueda efectuarse la operación requerida.

M.I ASOCIATIVA. $(AB)C = A(BC)$

M.II DISTRIBUTIVAS. $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.

M.III ELEMENTOS NEUTROS. Sea

$$I_r = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

una matriz diagonal de orden r tal que $\forall i = 1, \dots, r$, $a_{ii} = 1$.

a) E. NEUTRO A LA IZQUIERDA. $\forall A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, $I_m A = A$.

b) E. NEUTRO A LA DERECHA. $\forall A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, $A I_n = A$.

M.IV $\forall \alpha \in K$, $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Demostración

M.I Sean $A \in \mathcal{M}(m \times p, K)$, $B \in \mathcal{M}(p \times q, K)$ y $C \in \mathcal{M}(q \times n, K)$ y sea $D = AB$.

Procedamos a calcular un elemento del primer miembro de la igualdad $P = (AB)C$.

Si $D = AB$, el elemento que ocupa la posición (i, j) en la matriz D es de la forma

$$d_{ij} = \sum_{h=1}^p a_{ih} b_{hj}.$$

Luego si p_{ij} es el elemento de P que ocupa dicha posición, se tiene que

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^q d_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^q \sum_{h=1}^p a_{ih} b_{hk} c_{kj}. \quad (2.1)$$

Análogamente, sea $P' = A(BC)$ y $D' = BC$. Se tiene que

$$d'_{ij} = \sum_{k=1}^q b_{ik} c_{kj}$$

y, por tanto,

$$p'_{ij} = \sum_{h=1}^p a_{ih} d'_{hj} = \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^q a_{ih} b_{hk} c_{kj}. \quad (2.2)$$

Comparando 2.1 y 2.2 se tiene que

$$p_{ij} = p'_{ij} \implies P = P' \implies (AB)C = A(BC).$$

M.II Sean $A \in \mathcal{M}(m \times p, K)$, $B, C \in \mathcal{M}(p \times n, K)$, $D = A(B + C)$ y $D' = AB + AC$. Se tiene que

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^p a_{ik} c_{kj} = d'_{ij},$$

de donde

$$D = D' \implies A(B + C) = AB + AC.$$

M.III Son inmediatas ambas igualdades.

M.IV Sean $A \in \mathcal{M}(m \times p, K)$, $B \in \mathcal{M}(p \times n, K)$, $D = \alpha(AB)$, $D' = (\alpha A)B$ y $D'' = A(\alpha B)$. Se tiene que

$$d_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^p \alpha(a_{ik} b_{kj}).$$

Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa a $\alpha(a_{ik} b_{kj})$, se tiene:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^p (\alpha a_{ik}) b_{kj} = d'_{ij},$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} (\alpha b_{kj}) = d''_{ij}$$

y de aquí que,

$$d_{ij} = d'_{ij} = d''_{ij} \implies D = D' = D''.$$

Definición 2.1.6 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$. Decimos que la matriz B es la traspuesta de A si sus filas $1, 2, \dots, n$ son, respectivamente, iguales a las columnas $1, 2, \dots, n$ de la matriz A . A la matriz traspuesta de A la notaremos por A^t . Simbólicamente,

$$B = A^t \iff b_{ij} = a_{ji}, \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n).$$

Proposición 2.1.4 (PROPIEDADES) $\lambda \in K$

- I. $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K))$.
- II. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, $(\lambda \in K, A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K))$.
- III. $(AB)^t = B^t A^t$, $(A \in \mathcal{M}(m \times p, K), B \in \mathcal{M}(p \times n, K))$.

Demostración

- I. $(A + B)^t = (a_{ij} + b_{ij})^t = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = A^t + B^t$.
- II. $(\lambda A)^t = (\lambda a_{ij})^t = (\lambda a_{ji}) = \lambda(a_{ji}) = \lambda A^t$.
- III. El elemento que ocupa la posición (j, i) de la matriz (AB) es de la forma

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki},$$

de donde deducimos que el elemento que ocupa la posición (i, j) de $A^t B^t$ es

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki}.$$

Por otra parte, si

$$B^t = (b'_{ij}) \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p)$$

y

$$A^t = (a'_{ij}) \quad (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m),$$

se tendrá que el elemento que ocupa la posición (i, j) de la matriz $B^t A^t$ será de la forma

$$c''_{ij} = \sum_{k=1}^p b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^p b_{ki} a_{jk} = c'_{ij},$$

de donde deducimos que $(AB)^t = B^t A^t$.

2.2 El anillo de las matrices cuadradas

Proposición 2.2.1 Sea $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}(n \times n, K)$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n sobre K . Sobre dicho conjunto se definen las operaciones *adición* y *multiplicación* de matrices cuadradas de orden n . Dichas operaciones verifican:

1. La adición de matrices es una ley de composición interna sobre el conjunto \mathcal{M}_n . En efecto la suma de dos matrices cuadradas de orden n es una matriz cuadrada de orden n y dicha operación verifica la siguientes propiedades.

A.I ASOCIATIVA. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n, (A + B) + C = A + (B + C)$.

A.II CONMUTATIVA $\forall A, B \in \mathcal{M}_n, A + B = B + A$.

A.III E. NEUTRO $\forall A \in \mathcal{M}_n, A + 0 = A$.

A.IV E. SIMÉTRICO $\forall A \in \mathcal{M}_n, \exists (-A) \in \mathcal{M}_n \mid A + (-A) = 0$.

2. La multiplicación de matrices es una ley de composición interna sobre el conjunto \mathcal{M}_n . En efecto el producto de dos matrices cuadradas de orden n es una matriz cuadrada de orden n y dicha operación verifica la siguientes propiedades.

A.I ASOCIATIVA. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n, (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

A.II E. NEUTRO. $\forall A \in \mathcal{M}_n, AI_n = I_n A = A$, donde I_n es la matriz unidad de orden n definida en la proposición 2.1.3.

En general, esta operación *no es conmutativa*.

Ambas operaciones están relacionadas por la siguiente propiedad.

3. LEY DISTRIBUTIVA $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n, (A + B)C = AC + BC$.

Por todo ello, la terna $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ es un anillo no conmutativo con elemento unidad.

2.3 Determinantes: definición y propiedades

Nota¹ En el presente tema, $\mathcal{M}(n \times n, K)$ representará al conjunto de las matrices cuadradas de orden n sobre el cuerpo K y si $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ será notada por $A = (a_{ij})$, donde $(1 \leq i, j \leq n)$.

Definición 2.3.1 Llamamos submatriz de A de orden $n - r$ a la matriz cuadrada obtenida suprimiendo en A r filas y r columnas. Tal submatriz será notada por

$$A(i_1, i_2, \dots, i_r | j_1, j_2, \dots, j_r).$$

¹El desarrollo de este Tema se corresponde, salvo ligeros retoques, con el artículo “Una introducción a los determinantes ...” publicado por el autor en la revista Thales, número 0 (año 1984).

Ejemplo Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$A(1|3) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad A(1, 3|2, 4) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Definición 2.3.2 Llamamos determinante de la matriz cuadrada A a la aplicación

$$\det : \mathcal{M}(n \times n, K) \longrightarrow K$$

definida por

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{si } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A(1|j)) & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad (2.3)$$

El determinante de la matriz A será notado indistintamente con los símbolos $\det(A)$ o $|A|$.

Consecuencias

1. DETERMINANTE DE ORDEN 2

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

aplicando la fórmula 2.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A(1|1)) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A(1|2)) = \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

2. DETERMINANTE DE ORDEN 3

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

aplicando la fórmula 2.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A(1|1)) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A(1|2)) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(A(1|3)) = \\ &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

3. DETERMINANTE DE LA MATRIZ UNIDAD

Vamos a probar que $\det(I_n) = 1$. Procedamos por inducción sobre n .

- Para $n = 1$ es, por definición, $\det(I_1) = 1$.
- Supongamos que $\det(I_{n-1}) = 1$.
- Teniendo en cuenta que en la matriz I_n es $a_{11} = 1$, $a_{1j} = 0$ si $j \neq 1$ y que $A(1|1) = I_{n-1}$, se tiene:

$$\det(I_n) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A(1|1)) = 1.$$

4. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DIAGONAL Consideremos la matriz diagonal

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

De forma análoga a la anterior se prueba que

$$\det(D_n) = \prod_{i=1}^n d_{ii}.$$

5. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

De modo totalmente similar se prueba que si consideramos la matriz triangular inferior,

$$B_n = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\det(B_n) = \prod_{i=1}^n b_{ii}.$$

La fórmula 2.3, es bien conocida como desarrollo del determinante de A por los elementos de la primera fila. Probaremos a continuación que $\det(A)$ es independiente de la fila elegida.

Teorema 2.3.1 Para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, se verifica que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) \quad (2.4)$$

Demostración Procederemos por inducción sobre n (orden del determinante).

- Para $n = 2$, sabemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \\ &= (-1)^{2+1} a_{21} \det(A(2|1)) + (-1)^{2+2} a_{22} \det(A(2|2)) = \\ &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A(2|j)). \end{aligned}$$

- Supongamos que la fórmula 2.4 es cierta para toda matriz cuadrada cuyo orden sea menor que n .
- Procedamos a demostrarla cuando el orden de A sea n .
Por la definición 2.3, se tiene que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A(1|j)) \quad (2.5)$$

Ahora bien, $A(1|j)$ es una matriz de orden $n-1$ y, por la hipótesis de inducción podemos aplicar la fórmula 2.4.

Pero observemos que:

- Al suprimir la primera fila de A , la fila que ocupa el lugar $i-1$ en la matriz $A(1|j)$ está formada por elementos de la forma a_{ik} $k \neq j$ (ver esquema adjunto).
- Al suprimir la columna j de A , las columnas $1, 2, \dots, j-1$ de A lo son igualmente de $A(1|j)$ y que las columnas $j+1, \dots, n$ de A son, respectivamente, las columnas $j, j+1, \dots, n-1$ de $A(1|j)$ (ver esquema adjunto).

$$\text{Fila } i \text{ de } A \rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} a_{11} \dots a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} \dots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} \dots a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} \dots a_{nn} \end{array} \right) \leftarrow \text{Fila. } (i-1) \text{ de } A(1|j).$$

Por tanto, desarrollando $\det(A(1|j))$ por los elementos de la Fila $i-1$, se tiene que

$$\det(A(1|j)) = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{i-1+k} a_{ik} \det(A(1, i|k, j)) + \sum_{k=j+1}^n (-1)^{(i-1)+(k-1)} a_{ik} \det(A(1, i|j, k))$$

y, sustituyendo en 2.5, resulta:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \left(\sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{i-1+k} a_{ik} \det(A(1, i|k, j)) + \sum_{k=j+1}^n (-1)^{(i-1)+(k-1)} a_{ik} \det(A(1, i|j, k)) \right).$$

Intercambiando j por k en la última expresión (lo cual obliga a cambiar también el orden de los sumatorios) y efectuando operaciones, la igualdad anterior puede ser expresada del siguiente modo:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A(1, i|j, k)) + \sum_{j=k+1}^n (-1)^{(1+(j-1))} a_{1j} \det(A(1, i|k, j)) \right).$$

Observando que la expresión entre paréntesis del segundo miembro de la igualdad anterior es, por definición, el desarrollo de $\det(A(i|k))$ se tiene, finalmente, que

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A(i|k)).$$

expresión que es conocida como el “desarrollo del determinante de A por los elementos de la fila i ” y será utilizada inmediatamente en la demostración de algunas propiedades.

Proposición 2.3.1 (PROPIEDADES) Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre K .

- D.1 Si en la matriz A los elementos de una fila son todos nulos, entonces $\det(A) = 0$.
- D.2 Si en la matriz A se intercambian dos filas entre sí, el determinante de la matriz obtenida es opuesto al determinante de la matriz A .
- D.3 Si en la matriz A hay dos filas iguales, $\det(A) = 0$.
- D.4 Si multiplicamos una fila de la matriz A por el escalar c el determinante de la matriz obtenida es igual a $c \det(A)$.
- D.5 Si en la matriz A los elementos de dos filas son proporcionales, entonces $\det(A) = 0$.
- D.6 Si la fila r de la matriz A es suma de dos sumandos, el determinante de A se puede descomponer en la suma de los determinantes de dos matrices A' y A'' que tienen las filas $1, \dots, r-1, r+1, \dots, n$ iguales a las de A y cuyas filas r -ésimas están formadas, respectivamente, por los primeros y los segundos sumandos de dicha fila r de A .
- D.7 Si A' es la matriz obtenida si sustituyendo los elementos de cualquiera fila de A por ellos mismos más los correspondientes de cualquier otra fila multiplicados previamente por un escalar $c \in K$ se verifica que $\det(A') = \det(A)$.
- D.8 Si los elementos de la fila i de A verifican que $a_{ij} = \lambda a_{rj} + \mu a_{sj}$ ($j = 1, \dots, n$), $\det(A) = 0$

Demostración

- D.1 Supongamos que los elementos de la fila i son iguales a cero ($a_{ij} = 0$ ($j = 1, \dots, n$)). Desarrollando el determinante de A por los elementos de dicha fila, se tiene que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot 0 \cdot \det(A(i|j)) = 0.$$

- D.2 Consideraremos dos casos:

1. Las filas son consecutivas

Sean éstas las filas r y $r+1$. Si llamamos $B = (b_{ij})$ a la matriz obtenida al efectuar el intercambio se tiene que

$$b_{rj} = a_{r+1,j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad \det(B(r|j)) = \det(A(r+1|j)).$$

Por tanto, desarrollando el determinante de B por los elementos de su fila r , se tiene:

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} b_{rj} \det(B(r|j)) = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} a_{r+1,j} \det(A(r+1|j)) = \\ &= (-1)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{(r+1)+j} a_{r+1,j} \det(A(r+1|j)) = -\det(A)\end{aligned}$$

2. Las filas no son consecutivas

Sean éstas las filas r y s ($r < s$). El intercambio de dichas filas puede conseguirse mediante intercambios sucesivos entre filas consecutivas: primero bajando la fila r hasta la posición de la $s-1$ ($s-r-1$ intercambios consecutivos) y, en segundo lugar, subiendo la fila s hasta la posición que ocupaba la fila r ($s-r$ intercambios consecutivos). En total se han efectuado $2(s-r)-1$ intercambios. Es decir, un número impar. Si B es la matriz obtenida al intercambiar las filas r y s , se tendrá que

$$\det(B) = (-1)^{2(s-r)-1} \det(A) = -\det(A).$$

D.3 Supongamos que la matriz A tiene dos filas iguales y sea B la matriz obtenida intercambiando dichas filas. Por una parte, al aplicar la propiedad D.2, se tiene que

$$\det(B) = -\det(A)$$

pero, por otra, como $B = A$ habrá de ser

$$\det(B) = \det(A),$$

de donde

$$\det(A) = -\det(A) \implies \det(A) = 0.$$

D.4 Sea B la matriz obtenida multiplicando los elementos de la fila r de A por el escalar c . Es decir,

$$b_{ij} = a_{ij} \quad (i \neq r), \quad b_{rj} = ca_{rj} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Desarrollando el determinante de B por dicha fila r , se tiene:

$$\det(B) = \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} b_{rj} \det(B(r|j)) = \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} ca_{rj} \det(A(r|j)) = c \det(A).$$

D.5 Es consecuencia inmediata de las dos últimas propiedades.

D.6 Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{r1} + a''_{r1} & \dots & a'_{rn} + a''_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{r1} & \cdots & a'_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{r1} & \cdots & a''_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Desarrollando el determinante de A por los elementos de la fila r y teniendo en cuenta que $\det(A(r|j)) = \det(A'(r|j)) = \det(A''(r|j))$, deducimos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} (a'_{rj} + a''_{rj}) \det(A(r|j)) = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} a'_{rj} \det(A'(r|j)) + \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} a''_{rj} \det(A''(r|j)) = \\ &= \det(A') + \det(A''). \end{aligned}$$

D.7 Sea B la matriz obtenida sustituyendo cada elementos a_{rj} ($j = 1, \dots, n$) de A por $a_{rj} + ca_{sj}$ ($s \neq r$). Desarrollando el determinante de B por los elementos de dicha fila r , se tiene:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} (a_{rj} + ca_{sj}) \det(B(r|j)) = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} a_{rj} \det(A(r|j)) + c \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} a_{sj} \det(A(r|j)) = \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

ya que el segundo término de esta última expresión es igual a cero por ser el desarrollo de un determinante que tiene iguales las filas r y s .

D.8 Basta observar que $\det(A)$ puede descomponerse en la suma de dos determinantes que tienen dos filas proporcionales y que, por tanto, son iguales a cero.

Proposición 2.3.2 Si A es una matriz cuadrada de orden n sobre K y A^t es su matriz traspuesta, se verifica que $\det(A^t) = \det(A)$.

Demostración Procedamos por inducción sobre n .

Para $n = 1$ y $n = 2$ se verifica trivialmente.

Supongamos que la proposición es cierta para toda matriz de orden $n - 1$.

Prueba cuando A sea de orden n .

Sea $B = A^t$. Notemos que los elementos de la matriz B verifican que $b_{ji} = a_{ij}$. Igualmente se verifica que $B(j|i) = A(i|j)^t$ y que, por la hipótesis de inducción, $\det(A(i|j)^t) = \det(A(i|j))$. Por consiguiente, desarrollando el determinante de B por los elementos de la fila j , se tiene que

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} b_{ji} \det(B(j|i)) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)^t) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) \end{aligned}$$

Ahora bien, este resultado, como es obvio es válido para $\forall j \mid 1 \leq j \leq n$, luego

$$\begin{aligned} \text{para } j = 1 \quad \det(B) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1)), \\ \text{para } j = 2 \quad \det(B) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A(i|2)), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots, \\ \text{para } j = n \quad \det(B) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} a_{in} \det(A(i|n)). \end{aligned}$$

Sumando las n igualdades se obtiene:

$$n \det(B) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) \right).$$

Nótese que la expresión entre paréntesis es el desarrollo del determinante de A por los elementos de la fila i y, por tanto,

$$n \det(B) = \sum_{i=1}^n \det(A) = n \det(A),$$

de donde

$$\det(A^t) = \det(B) = \det(A).$$

Consecuencia Como las filas de A^t son las columnas de la matriz A , el desarrollo del $\det(A^t)$ por los elementos de una de sus filas se corresponde con el desarrollo del $\det(A)$ por los elementos de una de sus columnas. Es decir, si $B = A^t$ se tiene que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(B) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_{ij} \det(B(i|j)) = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A(j|i)^t) \stackrel{\text{p.h.}}{=} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A(j|i)). \end{aligned}$$

Por consiguiente, toda propiedad que verifiquen las filas de A^t la verificarán las columnas de A . Esto quiere decir que las propiedades D.1, D.2, D.3, D.4, D.5, D.6, D.7 y D.8 pueden ser enunciadas nuevamente cambiando sólo la palabra fila/s por columna/s.

Definición 2.3.3 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n . Llamamos *adjunto o cofactor* del elemento a_{ij} de A y lo notaremos por A_{ij} , a la expresión definida por la igualdad

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i|j)).$$

Consecuencia Con esta notación, si desarrollamos el determinante de A por los elementos de la fila i , se tiene que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

y, análogamente, desarrollando, por la columna j ,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

2.4 Matrices invertibles

Definición 2.4.1 Sea $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$. Decimos que A es una matriz invertible o regular si existe $B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ tal que $AB = BA = I_n$, donde I_n es la matriz cuadrada de orden n . La matriz B , recibe el nombre de *inversa* de la matriz A .

Proposición 2.4.1 Si $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ es una matriz invertible, la inversa de A es única.

Demostración Supongamos que B y B' son inversas de la matriz A . Por definición se tiene que

$$AB = BA = I_n, \quad AB' = B'A = I_n.$$

Por consiguiente,

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_n B' = B'.$$

Puesto que la inversa de la matriz A , si existe, es única será notada en lo sucesivo por A^{-1} .

Definición 2.4.2 Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n \times n, K)$. Llamamos adjunta de la matriz A a la matriz

$$\text{adj}(A) = (A_{ji}), \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

donde A_{ji} es el adjunto del elemento a_{ij} de A . Es decir,

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.4.2 Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n y $1 \leq r, s \leq n$ ($r \neq s$), se verifica que

$$\begin{aligned} a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \dots + a_{rn}A_{sn} &= 0, \\ a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \dots + a_{nr}A_{ns} &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Esta proposición suele ser enunciada del siguiente modo: *la suma de los productos de los elementos de una fila (columna) por los adjuntos de los elementos de otra fila (columna) es igual a cero.*

Demostración En efecto, dicho desarrollo equivale al desarrollo del determinante de una matriz que tiene iguales las filas (resp. columnas) r y s . Efectuemos la demostración para filas.

Consideremos una matriz $A = (a_{ij})$ tal que la fila s es igual a la fila r ($a_{sj} = a_{rj}$ $j = 1, \dots, n$). Con esta hipótesis será $\det(A) = 0$. Es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante de A por los elementos de la fila s se tiene que

$$a_{s1}A_{s1} + a_{s2}A_{s2} + \dots + a_{sn}A_{sn} = 0$$

y como $\forall j \mid 1 \leq j \leq n$ es $a_{sj} = a_{rj}$, sustituyendo se obtiene la primera fórmula de 2.6:

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \dots + a_{rn}A_{sn} = 0.$$

Análoga demostración se podría hacer para columnas (segunda fórmula de 2.6).

Proposición 2.4.3 Si A es una matriz de orden n sobre K , se verifica que:

1. $A \operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n$.
2. $\operatorname{adj}(A)A = \det(A)I_n$.

Basta tener en cuenta que

$$\begin{array}{ll} \text{si } s = r, & a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \dots + a_{rn}A_{sn} = |A| \\ \text{si } s \neq r, & a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \dots + a_{rn}A_{sn} = 0. \end{array}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} A \operatorname{adj}(A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|I_n. \end{aligned}$$

Análoga demostración para la segunda proposición.

Teorema 2.4.1 Si A es una matriz cuadrada tal que $\det(A) \neq 0$, A es invertible verificándose que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A).$$

Demostración Como $|A| \neq 0$, teniendo en cuenta las igualdades de la proposición anterior, se tiene

$$A \operatorname{adj}(A) = |A|I_n \implies A \left(\frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A) \right) = I_n$$

y, análogamente,

$$\operatorname{adj}(A)A = |A|I_n \implies \left(\frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A) \right) A = I_n.$$

De ambas igualdades se deduce que A es invertible y que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A).$$

2.5 Regla de Cramer

Definición 2.5.1 Consideremos el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

o bien, en forma matricial,

$$S : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

o, brevemente, $A\mathbf{x}^t = B$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1. La matriz A recibe el nombre de matriz de los coeficientes del sistema y la matriz B matriz columna de los términos independientes.
2. Llamamos matriz de la incógnita x_j ($j = 1, \dots, n$) y la notaremos por A_j , a la matriz obtenida sustituyendo la columna j de la matriz A por la columna formada con los términos independientes de S . Es decir,

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \overset{(j)}{b_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Diremos que el sistema S es de Cramer si $\det(A) \neq 0$.

Teorema 2.5.1 (REGLA DE CRAMER) Dado el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$S : A\mathbf{x}^t = B,$$

se verifica que si S es de Cramer tiene solución única y ésta viene dada por

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Demostración Como S es de Cramer, por definición se verifica que $\det(A) \neq 0$, luego A es invertible y, por tanto,

$$\mathbf{x}^t = A^{-1}B.$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

de donde

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}) = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Utilizando la notación clásica,

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \text{ donde } \Delta_j = \det(A_j), \Delta = \det(A).$$

2.6 Transformaciones elementales

Definición 2.6.1 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$.

1. Se dice que se ha aplicado a A una transformación elemental por filas (resp. columnas) de tipo I, si se ha sustituido una de sus filas (resp. columna) por ella más cualquier otra multiplicada por un escalar $c \in K$.
2. Decimos que se ha aplicado a la matriz A una transformación elemental por filas (resp. columnas) de tipo II, si se ha sustituido cualquiera de sus filas (resp. columnas) por ella multiplicada por un escalar $c \neq 0$.
3. Decimos que se ha aplicado a la matriz A una transformación elemental por filas (resp. columnas) de tipo III, si han permutado entre sí dos cualesquiera de sus filas (resp. columnas).

Nuestro próximo objetivo es expresar en lenguaje matricial los conceptos anteriores definiendo ciertas matrices tales que al multiplicarlas, a la izquierda o a la derecha, por A , den como resultado una transformación elemental por filas o por columnas aplicada a la matriz A .

Definición 2.6.2 Las matrices que se consideren en la presente definición son matrices cuadradas de orden conveniente ($m \times m$ o $n \times n$).

1. Llamamos *matriz elemental* de tipo I a la matriz $P_{ij}(c)$ ($i \neq j$) obtenida sustituyendo en la matriz unidad el cero que ocupa la posición (i, j) , por el escalar c .

Ejemplo Si $m = 4$,

$$P_{14}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{32}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Llamamos *matriz elemental* de tipo II a la matriz $M_i(c)$ ($c \neq 0$), obtenida sustituyendo en la matriz unidad el uno que ocupa la posición (i, i) por el escalar $c \neq 0$.

Ejemplo Si $m = 4$,

$$M_2(7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Llamamos *matriz elemental* de tipo III a la matriz T_{ij} , obtenida intercambiando entre sí las filas i y j de la matriz unidad.

Ejemplo Si $m = 4$,

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propiedades Las siguientes propiedades de las matrices elementales son de muy fácil comprobación por lo que se deja como ejercicio. (Se recuerda que las matrices elementales son matrices cuadradas y que en cada caso sus órdenes se tomarán de modo que sean multiplicables por la matriz dada A .)

Proposición 2.6.1 Sea $P_{ij}(c)$ una matriz elemental de tipo I. Se verifica que:

1. Si $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, entonces $P_{ij}(c)A$ es la matriz $A' \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ que se obtiene de A sin más que sustituir su fila i por ella más la fila j multiplicada por c .
2. Si $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, entonces $AP_{ij}(c)$ es la matriz $A' \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ que se obtiene de A sin más que sustituir su columna j por ella más la columna i multiplicada por c .
3. Como $\det(P_{ij}(c)) = 1$, la matriz $P_{ij}(c)$ es invertible verificándose que

$$P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c).$$

4. Si $A \in \mathcal{M}(m \times m, K)$, se verifica que

$$\det(P_{ij}(c)A) = \det(AP_{ij}(c)) = \det(A).$$

Proposición 2.6.2 Sea $M_i(c)$ una matriz elemental de tipo II. Se verifica que:

1. Si $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, entonces $M_i(c)A$ es la matriz $A' \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ que se obtiene de A sin más que sustituir su fila i por ella multiplicada por c .
2. Si $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, entonces $AM_i(c)$ es la matriz $A' \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ que se obtiene de A sin más que sustituir su columna i por ella c .
3. Como $\det(M_i(c)) = c \neq 0$, la matriz $M_i(c)$ es invertible verificándose que

$$M_i(c)^{-1} = M_i(c^{-1}).$$

4. Si $A \in \mathcal{M}(m \times m, K)$, se verifica que

$$\det(M_i(c)A) = \det(AM_i(c)) = c \det(A).$$

Proposición 2.6.3 Sea T_{ij} una matriz elemental de tipo III. Se verifica que:

1. Si $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, entonces $T_{ij}A$ es la matriz $A' \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ que se obtiene de A sin más que intercambiar entre sí sus filas i y j .

2. Si $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, entonces AT_{ij} es la matriz $A' \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ que se obtiene de A sin más que intercambiar sus columnas j e i .
3. Como $\det(T_{ij}) = -1$, la matriz T_{ij} es invertible verificándose que

$$T_{ij}^{-1} = T_{ji}.$$

4. Si $A \in \mathcal{M}(m \times m, K)$, se verifica que

$$\det(T_{ij}A) = \det(AT_{ij}) = -\det(A).$$

Consecuencias De las propiedades anteriores extraemos las siguientes consecuencias:

1. Una transformación elemental por filas o por columnas, de los tipos I, II o III, aplicada a la matriz A equivale a multiplicar, por la izquierda o por la derecha, dicha matriz por una matriz elemental, respectivamente, de los tipos I, II o III.
2. Las únicas transformaciones elementales que conservan el valor de los determinantes son las transformaciones elementales de tipo I.
3. Una matriz elemental de tipo III es, en realidad, producto de matrices elementales de los tipos I, y II como puede comprobarse en el siguiente ejemplo. No obstante, su utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, hace aconsejable su introducción.

Consideremos la matriz unidad I_4 . Se tiene que

$$T_{12}I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, haciendo las transformaciones elementales por filas que, generalmente, se indican en la parte superior de la flecha, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_2(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$T_{12} = M_2(-1)P_{12}(1)P_{21}(-1)P_{12}(1).$$

En general,

$$T_{ij} = M_j(-1)P_{ij}(1)P_{ji}(-1)P_{ij}(1).$$

Luego la matriz elemental T_{ij} es el producto de cuatro matrices elementales por lo que su utilización, supone una economía de cálculo.

2.7 Formas escalonadas

Definición 2.7.1 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$. Diremos que A es una matriz *escalonada por filas*,

1. si $A = 0$ o bien,
2. si $A \neq 0$, cuando existan $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$ tales que:
 - (a) Los elementos $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ son distintos de cero.
 - (b) $\forall j < j_i, a_{ij} = 0$ ($i = 1, \dots, r$) lo que es equivalente a decir que los elementos situados, en su caso, a la izquierda de $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ son iguales a cero.
 - (c) $\forall j \neq j_i, a_{ij} = 0$ ($i = 1, \dots, r$). O bien, los elementos situados, en su caso, encima y debajo de $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ son iguales a cero.
 - (d) $\forall i > r, a_{ij} = 0$ o, lo que es equivalente, las filas $r + 1, r + 2, \dots, m$ son iguales a cero.

Ejemplo Es una matriz *escalonada por filas* la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.7.2 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$. Diremos que A es una matriz *escalonada por columnas*,

1. si $A = 0$.
2. si $A \neq 0$, cuando existan $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq m$ tales que:
 - (a) Los elementos $a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_s s}$ son distintos de cero.
 - (b) $\forall i < i_j, a_{ij} = 0$ ($j = 1, \dots, s$) lo que es equivalente a decir que los elementos situados, en su caso, encima de $a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_s s}$ son iguales a cero.
 - (c) $\forall i \neq i_j, a_{ij} = 0$ ($j = 1, \dots, s$). O bien, los elementos situados, en su caso, a la izquierda y a la derecha de $a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_s s}$ son iguales a cero.
 - (d) $\forall j > s, a_{ij} = 0$ o, lo que es equivalente, las columnas $s + 1, s + 2, \dots, n$ son iguales a cero.

Ejemplo Es una matriz *escalonada por columnas* la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notas

1. Si A es una matriz escalonada por filas (resp. columnas), entonces a los elementos $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ (resp. $a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_s s}$), se les llama *pivotes* de las filas $1, 2, \dots, r$ (resp. de las columnas $1, 2, \dots, s$).

2. Nótese que, por definición, si A es una matriz escalonada por filas (resp. columnas), su traspuesta es una matriz escalonada por columnas (resp. por filas).

Definición 2.7.3 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ y $a_{ij} \neq 0$ un elemento no nulo de A . Diremos que se ha *pivotado* sobre el elemento a_{ij} si se han reducido a cero todos los elementos situados encima y debajo de él (resp. a su izquierda y derecha) mediante transformaciones elementales por filas (rep. columnas) de tipo I.

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

vamos a pivotar sobre el elemento a_{23} . Realizaremos las transformaciones elementales por filas que se indican sobre la flecha.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} P_{12}(-3) \\ P_{32}(4) \\ P_{42}(-2) \end{matrix}} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 5 & -14 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & 0 & -8 & -22 \\ -4 & -1 & 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, podemos pivotar sobre el elemento a_{23} para reducir a cero los restantes elementos de su fila aplicando a A las transformaciones elementales por columnas que se indican debajo de las flechas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} P_{31}(-2) \\ P_{34}(3) \\ P_{35}(-5) \end{matrix}} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & -4 & -8 & 18 \\ -4 & -1 & 2 & -7 & -10 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.7.1 Dada una matriz $A \neq 0$, se puede obtener a partir de ella una matriz A' escalonada por filas (resp. columnas), aplicando a A un número finito de transformaciones elementales por filas (resp. por columnas) de tipo I.

Demostración Daremos una demostración para filas. De forma análoga, se puede obtener una demostración para obtener una matriz escalonada por columnas.

Procederemos dando los siguientes pasos:

1. Consideremos la primera columna j_1 no nula de A . Pueden ocurrir dos casos:
 - (a) El elemento $a_{1j_1} \neq 0$. En este caso pivotamos sobre él y mediante transformaciones elementales por filas de tipo I, reducimos a cero todos los elementos situados debajo del mismo.
 - (b) El elemento $a_{1j_1} = 0$. Si este es el caso, llevamos a la posición $(1, j_1)$ cualquier elemento no nulo situado debajo de él (suma de filas) y a continuación procedemos como en (a). Sea A_1 la matriz así obtenida.

2. Sea $j_2 > j_1$ la siguiente columna de A_1 tal que tiene algún elemento distinto de cero por debajo de la primera fila. Llevamos, si procede, a la posición $(2, j_2)$ cualquier elemento no nulo situado debajo de él (suma de filas). Pivotando sobre él, anulamos, mediante transformaciones elementales por filas de tipo I, los elementos situados encima y debajo del mismo. Sea A_2 la nueva matriz obtenida.

3. Aplicando lo dicho en el punto 2, a las columnas $j_3 < \dots < j_r$ tales que tengan algún elemento no nulo debajo de la segunda, tercera, \dots , $(r-1)$ -ésima, el resultado será una matriz A_r , escalonada por filas. Esta matriz no es única ya que depende de la elección de los pivotes.

Definición 2.7.4 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, llamamos *forma escalonada por filas* (resp. *columnas*) de A a cualquier matriz escalonada por filas (resp. columnas) obtenida aplicando a la matriz A un número finito de transformaciones elementales por filas (resp. columnas) de tipo I.

En lo sucesivo, utilizaremos la abreviatura *f.e.p.f.* (resp. *f.e.p.c.*) para designar a las formas escalonadas por filas (resp. columnas) de una matriz.

Ejemplo 1 Calcular una forma escalonada de A , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Daremos los pasos siguientes:

1. La primera columna no nula de A es $j_1 = 2$ pero $a_{12} = 0$. Mediante la transformación elemental por filas $P_{12}(1)$, obtenemos la matriz

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pivotamos sobre el elemento a_{12} efectuando, sucesivamente, las transformaciones elementales por filas

$$P_{21}(-1), P_{31}(-2), P_{41}(-1)$$

con lo que obtenemos la matriz

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La primera columna que aparece con algún elemento debajo de la primera fila es $j_2 = 5$ y como $a_{25} = -1 \neq 0$, pivotamos sobre él para reducir a cero los elementos situados encima y debajo del mismo mediante las transformaciones elementales por filas

$$P_{12}(2), P_{32}(-4)$$

y obtendremos la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. La siguiente columna que, debajo de la segunda fila, tiene algún elemento distinto de cero es $j_3 = 6$ y como $a_{36} \neq 0$ pivotamos sobre él con lo que anularemos los elementos de dicha columna situados por encima y por debajo de dicho a_{36} mediante las siguientes transformaciones elementales por filas de tipo I,

$$P_{13} \left(\frac{1}{2} \right), P_{23} \left(\frac{1}{2} \right)$$

con lo que obtenemos la matriz

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como puede observarse, todos los elementos de la cuarta fila son iguales a cero y, por ello, el proceso ha terminado y A_3 es una forma escalonada por filas de A .

Resumiendo, el esquema seguido ha sido el siguiente:

$$A \xrightarrow{P_{12}(1)} A_0 \xrightarrow{\begin{matrix} P_{21}(-1) \\ P_{31}(-2) \\ P_{41}(-1) \end{matrix}} A_1 \xrightarrow{\begin{matrix} P_{12}(2) \\ P_{32}(-4) \end{matrix}} A_2 \xrightarrow{\begin{matrix} P_{13}(\frac{1}{2}) \\ P_{23}(\frac{1}{2}) \end{matrix}} A_3$$

Matriz de paso a f.e.p.f. Un aspecto interesante es el cálculo de la matriz de paso P tal que $A_3 = PA$. Dicha matriz viene dada por la siguiente igualdad:

$$P = P_{23} \left(\frac{1}{2} \right) P_{13} \left(\frac{1}{2} \right) P_{32}(-4) P_{12}(2) P_{41}(-1) P_{31}(-2) P_{21}(-1) P_{12}(1),$$

de donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el siguiente ejemplo damos un método sencillo para su cálculo.

Ejemplo 2 Calcular una f.e.p.f. de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

y la correspondiente matriz de paso.

Solución

a) **Cálculo de una f.e.p.f. de A .**

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{13}(1)} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{31}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12}(-\frac{3}{2})} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{13}(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & \frac{17}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} = A'$$

b) **Matriz de paso** P tal que $A' = PA$.

Desde luego,

$$P = P_{13}\left(\frac{1}{4}\right) P_{32}\left(\frac{3}{2}\right) P_{12}\left(-\frac{3}{2}\right) P_{31}(-1) P_{13}(1)$$

Para su cálculo (que puede efectuarse multiplicando las matrices del segundo miembro), procederemos a aplicar exactamente las mismas transformaciones elementales y en el mismo orden a la matriz unidad I_3 .

$$\begin{aligned} I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{P_{12}(-\frac{3}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(\frac{3}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{13}(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{9}{8} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

Lema 2.7.1 Sea A una matriz cuadrada de orden n ($A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$) y A' una *f.e.p.f.* de A . Se verifica:

1. $\det(A) \neq 0$ si y sólo si A' es de la forma

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

con $a_i \neq 0$ ($i = 1 \dots, n$).

Si este es el caso, A' es también una *f.e.p.c.* de A .

2. $\det(A) = 0$ si y sólo si A' tiene al menos una fila de ceros.

Demostración

1. Como $\det(A) = \det(A') \neq 0$, A' no puede tener ninguna fila de ceros y, en consecuencia, tiene n pivotes, luego estos han de estar en la diagonal. Por otra parte, como a la izquierda, encima y debajo de los pivotes tiene que haber ceros, A' tiene que ser una matriz diagonal. Obviamente, si A' es diagonal con todos sus pivotes distintos de cero, $\det(A') = \det(A) \neq 0$. La segunda parte es inmediata ya que la traspuesta de una matriz escalonada por filas es una matriz escalonada por columnas y, por ser A' diagonal, $A'^t = A'$.

2. Si A' no tuviese ninguna fila de ceros, sería diagonal con todos los elementos de la diagonal distintos de cero y, por consiguiente, $\det(A) = \det(A') \neq 0$, en contra de la hipótesis. El recíproco es inmediato.

Teorema 2.7.2 (CAUCHY-BINET) Si $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ entonces se verifica que

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Demostración Sean A' una f.e.p.f de A y B' una f.e.p.c. de B y P y Q las correspondientes matrices de paso. Se tiene que

$$A' = PA, \quad B' = BQ.$$

Caben dos posibilidades:

1. Que $\det(A) = 0$ o $\det(B) = 0$. Si $\det(A) = 0$, por el lema, A' tiene, al menos, una fila de ceros y, por consiguiente, $A'B'$ tiene, al menos, una fila de ceros, luego $\det(A'B') = 0$. De aquí que

$$0 = \det(A'B') = \det(PABQ) = \det(AB)$$

ya que P y Q son producto de transformaciones elementales, respectivamente, por filas o por columnas de tipo I que no alteran el valor del determinante y, partiendo de este último resultado, se tiene que

$$0 = \det(AB) = 0 \det(B) = \det(A) \det(B).$$

2. Si $\det(A) \neq 0$ y $\det(B) \neq 0$, de acuerdo con el lema, A' y B' son de la forma

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

con todos sus pivotes distintos de cero. Por tanto,

$$\det(A'B') = \prod_{i=1}^n a_i b_i = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{i=1}^n b_i = \det(A') \det(B'),$$

de donde $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Proposición 2.7.1 Sea $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$. Si A es invertible, entonces $\det(A) \neq 0$.

Demostración En efecto,

$$A \text{ invertible} \implies \exists B \in \mathcal{M}(n \times n, K) \mid AB = I_n \implies \det(A) \det(B) = 1 \implies \det(A) \neq 0.$$

Nota Como anteriormente se probó que

$$\det(A) = 0 \implies A \text{ no invertible},$$

como consecuencia de la proposición anterior podemos concluir que

$$A \text{ invertible} \iff \det(A) \neq 0.$$

Proposición 2.7.2 Consideremos el conjunto de las matrices invertibles. Es decir, el conjunto

$$\text{Gl}(n, K) = \{A \in \mathcal{M}(n \times n, K) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Se verifica que el conjunto $\text{Gl}(n, K)$ tiene estructura de grupo respecto de la multiplicación de matrices.

Demostración Es muy fácil comprobar que,

- El producto de dos matrices invertibles es invertible.
- La matriz I_n es invertible.
- Si A es invertible, A^{-1} es invertible.

Definición 2.7.5 El grupo $(\text{Gl}(n, K), \cdot)$ recibe el nombre de grupo lineal o grupo de las matrices regulares de orden n sobre K .

Proposición 2.7.3 Consideremos el conjunto de las matrices invertibles cuyo determinante sea igual a uno. Es decir, sea

$$\text{Sl}(n, K) = \{A \in \text{Gl}(n, K) \mid \det(A) = 1\}.$$

Se verifica que $\text{Sl}(n, K)$ es un subgrupo del grupo $\text{Gl}(n, K)$.

Demostración Es inmediata.

Definición 2.7.6 El grupo $(\text{Sl}(n, K), \cdot)$, recibe el nombre de grupo especial lineal de orden n sobre K .

Proposición 2.7.4 Si $A \in \text{Gl}(n, K)$ existe una *f.e.p.f.* de A tal que sus $n - 1$ pivotes son iguales a uno y el pivote n -ésimo es igual a $\det(A)$.

Demostración Como $\det(A) \neq 0$ cualquier *f.e.p.f.* de A , es de la forma

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

con todos los elementos de la diagonal distintos de cero, podemos proceder con las dos primeras filas de A' del modo siguiente:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(1)} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12}(a_1^{-1})} \\ & \begin{pmatrix} 1 + a_1 & a_2 a_1^{-1} & 0 & \dots \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & a_2 a_1^{-1} - a_2 & 0 & \dots \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-a_1)} \\ & \begin{pmatrix} 1 & a_2 a_1^{-1} - a_2 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 a_2 & 0 & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando el mismo algoritmo a la nueva fila segunda y a la tercera de la matriz obtenida y reiterando el procedimiento llegaremos, después de anular los elementos situados encima de los pivotes a una *f.e.p.f.* de A de la forma

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cdots & & \\ & & 1 & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

La segunda parte de la demostración es ahora inmediata. En efecto,

$$d_n = \det(A'') = \det(A') = \det(A).$$

Nota Aunque la demostración proporciona un algoritmo para el cálculo de la *f.e.p.f.* con $n - 1$ elementos en la diagonal iguales a uno, la práctica manual es más variada en procedimientos, la mayor parte de las veces mucho más simples como se va a poner de manifiesto en el ejemplo que sigue a las consecuencias de la presente proposición.

Consecuencias

1. Si $A \in \text{Sl}(n, K)$, una *f.e.p.f.* de A es la matriz unidad I_n .
Basta tener en cuenta que, aplicado el algoritmo anterior, $d_n = \det(A) = 1$.
2. Si $A \in \text{Sl}(n, K)$, se puede expresar como producto de matrices elementales de tipo I.
En efecto, como I_n es una *f.r.p.f.* de A , se tendrá que

$$I_n = P_1 P_2 \dots P_r A$$

donde las matrices P_i son matrices elementales de tipo I. Despejando A se tiene que

$$A = P_r^{-1} \dots P_2^{-1} P_1^{-1}.$$

Ejemplo Expresar como producto de matrices elementales de tipo I la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = 1$, la matriz A tiene una *f.e.p.f.* igual a la matriz unidad I_4 . Tratemos de calcular ésta.

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{P_{34}(1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{13}(-1)} \\
 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\begin{matrix} P_{31}(1) \\ P_{41}(-3) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} P_{12}(1) \\ P_{32}(-1) \\ P_{42}(-4) \end{matrix}} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\begin{matrix} P_{13}(-1) \\ P_{43}(2) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} P_{14}(-1) \\ P_{24}(1) \\ P_{34}(2) \end{matrix}} I_4,
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 I_4 = & P_{34}(2) P_{24}(1) P_{14}(-1) P_{43}(2) P_{13}(-1) P_{42}(-4) \\
 & P_{32}(-1) P_{31}(1) P_{41}(-3) P_{12}(1) P_{13}(-1) P_{34}(1) A.
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
 A = & P_{34}(-1) P_{13}(1) P_{12}(-1) P_{41}(3) P_{31}(-1) P_{32}(1) \\
 & P_{42}(4) P_{13}(1) P_{43}(-2) P_{14}(1) P_{24}(-1) P_{34}(-2).
 \end{aligned}$$

2.8 Forma reducida de una matriz

Definición 2.8.1 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$. Decimos que A es una matriz en la forma reducida por filas (resp. columnas)² si se verifica:

- A es una matriz escalonada por filas (resp. columnas).
- Todos los pivotes de A son iguales a uno.

En lo sucesivo utilizaremos la abreviatura *f.r.p.f.* (resp. *f.r.p.c.*) para designar a una matriz en la forma reducida por filas (resp. columnas).

Teorema 2.8.1 Dada la matriz $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, se puede obtener a partir de A una *f.r.p.f.* (resp. *f.r.p.c.*) aplicando a la matriz A un número finito de transformaciones elementales por filas (resp. columnas) de los tipos I y II.

Demostración Basta obtener una *f.e.p.f.* (resp. *f.e.p.c.*) de A (las transformaciones elementales que se apliquen son, exclusivamente, de tipo I) y a continuación dividir cada fila por su pivote (transformaciones elementales de tipo II).

²Las formas reducidas por filas o por columnas de una matriz A , también son conocidas como formas normales de Hermite por filas o por columnas de A .

Proposición 2.8.1 Sobre el conjunto $\mathcal{M}(m \times n, K)$, definamos la siguiente relación binaria: si $A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ diremos que A es equivalente por filas a B si y sólo si existe una matriz invertible P tal que $A = PB$. Simbólicamente

$$A \sim_f B \iff \exists P \in \text{Gl}(m, K) \mid A = PB.$$

La relación así definida es de equivalencia.

Demostración Basta ver que se verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

I. REFLEXIVA. $\forall A \in \mathcal{M}(m \times n, K), A = I_m A \implies A \sim_f A$.

II. SIMÉTRICA. $A \sim_f B \implies \exists P \in \text{Gl}(m, K) \mid A = PB \implies B = P^{-1}A \implies B \sim_f A$.

III. TRANSITIVA. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}(m \times n, K)$,

$$A \sim_f B \iff \exists P_1 \in \text{Gl}(m, K) \mid A = P_1 B \quad (2.7)$$

$$B \sim_f C \iff \exists P_2 \in \text{Gl}(m, K) \mid B = P_2 C \quad (2.8)$$

Sustituyendo 2.8 en 2.7 se tiene:

$$A = (P_1 P_2) C = Q C \implies A \sim_f C$$

ya que $Q = P_1 P_2 \in \text{Gl}(m, K)$.

Lema 2.8.1 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ una matriz en la forma reducida por filas con r pivotes y $P \in \mathcal{M}(m \times m, K)$ tal que $A = PA$, entonces la matriz P es de la forma

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & P_1 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right).$$

cualesquiera que sea las columnas $r + 1, \dots, n$ de P .

Demostración Sea $P = (p_{ij})$ ($1 \leq i, j \leq m$). Si los r pivotes de A están en las posiciones $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (r, j_r)$, las columnas j_1, j_2, \dots, j_r de PA son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \\ \vdots \\ p_{mr} \end{pmatrix}$$

y como $PA = A$, éstas habrán de ser, respectivamente, iguales a las columnas j_1, j_2, \dots, j_r de A que son las columnas de los pivotes. Luego, se tendrá que

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.8.2 Si $A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ dos matrices en la *f.r.p.f* y equivalentes por filas, se verifica que $A = B$.

Demostración Como A y B son equivalentes por filas se deduce, por definición, que existe una matriz invertible de orden m tal que $B = PA$.

Procedamos a demostrar por inducción sobre n (número de columnas) que $A = B$.

- Para $n = 1$ caben dos casos:

– $A = (0, 0, \dots, 0)^t$ (no tiene pivote), en cuyo caso será

$$B = P(0, 0, \dots, 0)^t = (0, 0, \dots, 0)^t.$$

– $A = (1, 0, \dots, 0)^t$ (tiene un pivote). En este caso, B no puede ser de la forma

$$(0, 0, \dots, 0)^t$$

ya que si lo fuese, se tendría que

$$A = P^{-1}B = (0, 0, \dots, 0)^t,$$

en contra de la hipótesis. Tendrá pues que ser $B = (1, 0, \dots, 0)^t$ ya que B es una matriz en la *f.r.p.f.*

- Supongamos el lema cierto para toda matriz cuyo orden sea $n - 1$.

- Prueba para n .

Sean A_1 y B_1 , respectivamente, las submatrices formadas con las $n - 1$ primeras columnas de A y de B . Como

$$B = PA \implies B_1 = PA_1,$$

se deduce, por la hipótesis de inducción que $A_1 = B_1$. Si A_1 tiene r pivotes, por el lema 2.8.1 P será de la forma

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & P_1 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right).$$

con la única condición de que $\det(P) \neq 0$.

Sean A_n y B_n , respectivamente, las últimas columnas de A y de B . Caben igualmente dos casos:

- A tiene r pivotes. en este caso

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies B_n = PA_n = \left(\begin{array}{c|c} I_r & P_1 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_n.$$

– A tiene $r + 1$ pivotes. Si este es el caso,

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde el uno está en la fila $r + 1$. En este caso,

$$A_n = P^{-1}B_n.$$

Ahora bien, como B es una matriz en la *f.r.p.f.*, B_n tiene que ser de una de las formas

$$B_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde el uno está en la fila $r + 1$.

En el primero de los casos, se tendrá que

$$A_n = P^{-1}B_n = \left(\begin{array}{c|c} I_r & P'_1 \\ \hline 0 & P'_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

en contra de la hipótesis, luego tiene que ser $B_n = A_n$ con lo cual $A = B$, como se quería demostrar.

Teorema 2.8.2 (UNICIDAD). Para toda matriz $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, la *f.r.p.f.* de A obtenida aplicando a dicha matriz transformaciones elementales por filas de los tipos I, II y III, es única.

Demostración En efecto Supongamos que A_1 y A_2 son dos *f.r.p.f.* de A con matrices de paso, respectivamente, P_1 y P_2 . Se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = P_1 A \implies A = P_1^{-1} A_1 \\ A_2 = P_2 A \implies A = P_2^{-1} A_2 \end{array} \right\} \implies P_1^{-1} A_1 = P_2^{-1} A_2 \implies A_2 = P_2 P_1^{-1} A_1 \implies A_2 = A_1,$$

de acuerdo con el lema 2.8.2.

Definición 2.8.2 Llamamos *f.r.p.f.* de una matriz A , a la a la matriz en la *f.r.p.f.* obtenida aplicando a A un número finito de transformaciones elementales de los tipos I, II y III.

Proposición 2.8.2 Sean $A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K)$. Se verifica que $A \sim_f B$ si y sólo si A y B tienen la misma *f.r.p.f.*

Demostración Sean, respectivamente, A' y B' las *f.r.p.f.* de A y de B y P_1 y P_2 las correspondientes matrices de paso.

\Rightarrow

$$A \sim_f B \implies \exists P \in \text{Gl}(m, K) \mid B = PA. \quad (2.9)$$

Por otra parte

$$(A' = P_1 A) \wedge (B' = P_2 B) \implies (A = P_1^{-1} A') \wedge (B = P_2^{-1} B').$$

Sustituyendo en 2.9, se tiene:

$$P_2^{-1} B' = P P_1^{-1} A' \implies B' = P_2 P P_1^{-1} A' \implies A' = B',$$

donde la última implicación es consecuencia inmediata del lema 2.8.2 ya que $P_2 P P_1^{-1} \in \text{Gl}(m, K)$.

\Leftarrow

$$A' = B' \implies P_1 A = P_2 B \implies B = (P_2^{-1} P_1) A \implies A \sim_f B,$$

basta tomar $P = P_2^{-1} P_1$.

Proposición 2.8.3 Sea $A \in \text{Gl}(n, K)$, A' la *f.r.p.f.* de A y P una matriz de paso ($A' = PA$). se verifica que:

1. $A' = I_n$.
2. $A^{-1} = P$.
3. La matriz A se puede expresar como producto de matrices elementales de los tipos I, II y III.

Demostración

1. Sabemos (ver proposición 2.7.1) que una *f.e.p.f.* de A es de la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \quad (a_i \neq 0)$$

luego la *f.r.p.f.* de A será $A' = I_n$ lo que equivale a dividir cada fila de A_1 por el inverso de su pivote que es una transformación elemental por filas del tipo II.

2. De lo anterior se deduce que

$$I_n = PA \implies A^{-1} = P.$$

3. Sea $P = T_r \dots T_2 T_1$, donde T_i es una matriz elemental de los tipos I, II o III. Como

$$I_n = PA = T_r \dots T_2 T_1 A \implies A = T_1^{-1} T_2^{-1} \dots T_r^{-1}.$$

Se recuerda a este respecto que $P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c)$, $M_i(c)^{-1} = M_i(c^{-1})$ y que $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$.

Ejemplo Calculemos la matriz inversa y la factorización en matrices elementales de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Procedamos del siguiente modo:

$$(A|I_3) =$$

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{P_{21}(-2) \\ P_{31}(3)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{M_2(\frac{1}{3})} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{P_{12}(1) \\ P_{32}(5)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{M_3(3)} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{P_{13}(-\frac{2}{3}) \\ P_{23}(\frac{1}{3})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & 3 \end{array} \right) = (I_3 | A^{-1}). \end{aligned}$$

Respecto a la factorización de la matriz A en producto de matrices elementales, partimos de la igualdad

$$A^{-1} = P = P_{13} \left(-\frac{2}{3} \right) P_{23} \left(\frac{1}{3} \right) M_3(3) P_{12}(1) P_{32}(5) M_2 \left(\frac{1}{3} \right) P_{21}(-2) P_{31}(3),$$

de donde se deduce que

$$A = P^{-1} = P_{31}(-3) P_{21}(2) M_2(3) P_{32}(-5) P_{12}(-1) M_3 \left(\frac{1}{3} \right) P_{23} \left(-\frac{1}{3} \right) P_{13} \left(\frac{2}{3} \right).$$

2.9 El rango de una matriz

Definición 2.9.1 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$. Llamamos *rango* de la matriz A al número de filas no nulas (número de pivotes) de cualquier *f.e.p.f.* de A o, lo que es lo mismo, al número de filas no nulas (número de pivotes) de su *f.r.p.f.*

Si el rango de la matriz A es r notaremos $\text{rg}(A) = r$.

Consecuencias

1. Sea $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$,

$$A \in \text{Gl}(n, K) \iff \text{rg} A = n.$$

Es evidente, vista la proposición 2.7.4 o la 2.8.3.

2. Sean $A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K)$.

(a)

$$A \sim_f B \implies \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B).$$

De otro modo,

$$A \in \mathcal{M}(m \times n, K) \implies \forall P \in \operatorname{Gl}(m, K), \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(PA). \quad (2.10)$$

Basta recordar que si $A \sim_f B$, ambas matrices tiene la misma *f.r.p.f.* (ver proposición 2.8.2).

(b) Como caso particular, si B es la matriz obtenida aplicando a la matriz A una transformación elemental por filas, entonces $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$.

En efecto B se obtendría multiplicando a la izquierda de A por una matriz elemental de cualquiera de los tipos I, II, o III que es una matriz invertible.

Proposición 2.9.1 Si $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, $\forall Q \in \operatorname{Gl}(n, K)$, se verifica que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(AQ)$.

Demostración Sea A' la *f.r.p.f.* de A y P una matriz de paso ($A' = PA$). Se tiene que

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A') \stackrel{(1)}{\geq} \operatorname{rg}(A'Q) = \operatorname{rg}(P(AQ)) \stackrel{(2)}{=} \operatorname{rg}(AQ).$$

Por otra parte, aplicando el resultado anterior a la propia matriz AQ , deducimos que

$$\operatorname{rg}(AQ) \geq \operatorname{rg}((AQ)Q^{-1}) = \operatorname{rg}(A)$$

y, de ambas desigualdades, se deduce que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(AQ)$.

Justificación de los pasos

(1) Las filas nulas de A' se transfieren en la multiplicación al producto $A'Q$, por lo que $A'Q$ tiene, al menos, las mismas filas de ceros que A' .

(2) Por la proposición 2.10.

Consecuencia Si B es la matriz obtenida aplicando a la matriz A una transformación elemental por columnas de los tipos I, II o III, entonces $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$.

En efecto, una transformación elemental de cualquiera de los tipos indicados equivale a multiplicar por la derecha la matriz A por una matriz elemental de los tipos I, II o III que son invertibles.

Proposición 2.9.2 Sobre el conjunto $\mathcal{M}(m \times n, K)$, definamos la siguiente relación binaria: si $A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ diremos que A y B son equivalentes por rango si y sólo si existen dos matrices invertibles P y Q tal que $B = PAQ$. Simbólicamente

$$A \sim_r B \iff \exists P \in \operatorname{Gl}(m, K), \exists Q \in \operatorname{Gl}(n, K) \mid B = PAQ.$$

La relación así definida es de equivalencia.

Demostración Basta ver que se verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Supondremos que las matrices que se tomen son invertibles y de órdenes adecuados.

I. REFLEXIVA. $\forall A \in \mathcal{M}(m \times n, K), A = I_m A I_n \implies A \sim_r A$.

II. SIMÉTRICA. $A \sim_r B \implies \exists P, Q \mid B = PAQ \implies A = P^{-1} A Q^{-1} \implies B \sim_r A$.

III. TRANSITIVA. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}(m \times n, K)$,

$$A \sim_r B \iff \exists P_1, Q_1 \mid B = P_1 A Q_1 \quad (2.11)$$

$$B \sim_r C \iff \exists P_2, Q_2 \mid C = P_2 B Q_2 \quad (2.12)$$

Sustituyendo 2.11 en 2.12 se tiene que

$$C = (P_2 P_1) A (Q_1 Q_2) \implies A \sim_r C,$$

Basta tomar $P = P_2 P_1$ y $Q = Q_1 Q_2$.

Lema 2.9.1 Consideremos la matrices

- $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$,
- A' la *f.r.p.f.* de A y P una matriz de paso ($A' = PA$),
- A'' la *f.r.p.c.* de A' y Q una matriz de paso ($A'' = A'Q$).

Bajo estas condiciones se verifica que

$$\text{rg}(A) = r \iff A'' = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde I_r es la matriz unidad de orden r .

Demostración

\implies Si $\text{rg}(A) = r$, su *f.r.p.f.* tiene r pivotes. Basta llevar dichos pivotes a las posiciones $(1, 1), (2, 2), \dots, (r, r)$ mediante suma de columnas (transformaciones elementales por columnas de tipo I) y a continuación pivotar hacia la derecha (igualmente, mediante transformaciones elementales por columnas de tipo I).

\impliedby Si

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

la *f.r.p.f.*, A' de la matriz A , tiene exactamente r pivotes con lo cual $\text{rg}(A) = r$.

Consecuencia Si A'' es la *f.r.p.c.* de la *f.r.p.f.* de la matriz A , $A'' \sim_r A$.

En efecto, por las hipótesis de la proposición $A'' = PAQ$, luego basta aplicar la definición.

Ejemplo Consideremos la matriz en la *f.r.p.f.*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución Llevemos en primer lugar los pivotes a las posiciones $(1, 1), (2, 2)$ y $(3, 3)$, respectivamente, mediante las suma de columnas que se indican debajo de las flechas (transformaciones elementales

por columnas) y, a continuación, anulamos los elementos situados a la derecha de los nuevos pivotes.

$$\begin{aligned}
 A' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{P_{32}(1) \\ P_{53}(1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{P_{12}(-2) \\ P_{14}(-3)}]{} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{P_{23}(-1) \\ P_{24}(-4)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{35}(-1)} \\
 &\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = A''
 \end{aligned}$$

La matriz de paso $Q \in \text{Gl}(5, K)$ tal que $A'' = A'Q$, se calcula teniendo en cuenta que

$$A'' = A' P_{32}(1) P_{53}(1) P_{12}(-2) P_{14}(-3) P_{24}(-4)$$

Es decir, aplicando a la matriz unidad de orden cinco las mismas transformaciones elementales por columnas que las realizadas a la matriz dada A' .

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{P_{32}(1) \\ P_{53}(1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{P_{12}(-2) \\ P_{14}(-3)}]{} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{P_{23}(-1) \\ P_{24}(-4)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{35}(-1)} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q
 \end{aligned}$$

Teorema 2.9.1 Sean $A, B \in \mathcal{M}(m \times n, K)$. Se verifica que

$$A \sim_r B \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(B).$$

Demostración

\Rightarrow $A \sim_r B \implies \exists P, Q \mid B = PAQ$. Aplicando sucesivamente la consecuencia 2.10 y la proposición 2.9.1, se tiene:

$$\text{rg}(B) = \text{rg}(PAQ) = \text{rg}(AQ) = \text{rg}(A).$$

◁ Sea $\text{rg}(B) = \text{rg}(A) = r$. De acuerdo con el lema 2.9.1, si A'' y B'' son las formas reducidas por columnas de las formas reducidas de A y B , respectivamente, será

$$A'' = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B''.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la consecuencia de dicho lema, se tiene que

$$A'' = B'' \implies P_1 A Q_1 = P_2 B Q_2 \implies B = P_2^{-1} P_1 A Q_1 Q_2^{-1} \implies A \sim_r B,$$

pues basta tomar $P = P_2^{-1} P_1$ y $Q = Q_1 Q_2^{-1}$.

(En realidad este resultado es consecuencia inmediata de la propiedad transitiva de la relación de equivalencia definida por ser las matrices A y B equivalentes a la matriz $A'' = B''$. Sin embargo, la demostración anterior es constructiva. Es decir, dadas las matrices equivalentes por rango A y B se han calculado las correspondientes matrices de paso.)

Proposición 2.9.3 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ Y A^t la traspuesta de A . Se verifica que:

1. $\text{rg}(A^t) = \text{rg}(A)$.
2. El rango de A es igual al número de columnas no nulas de su *f.r.p.c.*

Demostración

1. Sea $\text{rg}(A) = r$ y A'' la *f.r.p.c.* de la *f.r.p.f.* de A y P y Q las correspondientes matrices de paso. Se sabe (ver lema 2.9.1) que

$$A'' = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, es

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P A Q.$$

Calculando la matriz traspuesta de ambos miembros, se tiene que

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q^t A^t P^t \implies A^t \sim_r \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(A^t) = \text{rg} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r.$$

(Nótese que la traspuesta de la matriz A'' es de orden $n \times m$, pero que su forma es la misma por lo que $\text{rg}(A'') = \text{rg}(A''^t) = r$.)

2. Sea A' la *f.r.p.c.* de A y supongamos que tiene r columnas no nulas. Sea Q la correspondiente matriz de paso, de acuerdo con estas hipótesis, se tiene:

$$A' = A Q \implies A'^t = Q^t A^t.$$

Como A'^t es la *f.r.p.f.* de A^t , se tiene que $\text{rg}(A'^t) = r$ y, por lo demostrado en el punto anterior, deducimos que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t) = r$ por hipótesis, número de columnas no nulas de la *f.r.p.c.* de A .

2.10 Rango y determinantes

Nota Nos proponemos a continuación a calcular el rango de una matriz a través de los determinantes. Este método resulta muy útil, especialmente cuando se trate de calcular el rango de una matriz dependiente de uno o más parámetros y de su aplicación inmediata que es la discusión del carácter de un sistema de ecuaciones lineales que dependa de uno o más parámetros.

Por razones de claridad se han enunciado y demostrado algunas proposiciones para las filas de A . Análogamente se podrían enunciar y demostrar para las columnas de A .

Proposición 2.10.1 Sea M un menor de orden r de la matriz A tal que $\det(M) \neq 0$ y supongamos que el determinante de todos los menores de orden $r+1$ que puedan formarse orlando M con los elementos de la fila s son iguales a cero. Mediante transformaciones elementales de tipo I, se pueden reducir a cero todos los elementos de dicha fila s .

Demostración Supongamos que M se ha formado con las r primeras filas y las r primeras columnas de A . Consideremos los determinantes

$$M_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & a_{sj} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Tales determinantes verifican:

- $M_j = 0$ para $j = 1, 2, \dots, r$ ya que la primera y última columnas serían iguales.
- Para $j = r+1, \dots, n$, por hipótesis $M_j = 0$.
- Para todos los determinantes M_j , los adjuntos de los elementos $a_{1j}, \dots, a_{rj}, a_{sj}$ son iguales y los notaremos, respectivamente, por $N_1, \dots, N_r, |M|$.

Desarrollando M_j por los elementos de la columna j , obtendremos

$$a_{1j}N_1 + a_{2j}N_2 + \dots + a_{rj}N_r + a_{sj}|M| = 0.$$

Como por hipótesis $|M| \neq 0$, se tiene que

$$a_{sj} = -a_{1j} \frac{N_1}{|M|} - a_{2j} \frac{N_2}{|M|} - \dots - a_{rj} \frac{N_r}{|M|}.$$

Tomando

$$\alpha_i = -\frac{N_i}{|M|} \quad (i = 1, \dots, r),$$

se tiene que

$$a_{sj} = \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_r a_{rj}, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Por consiguiente, bastará aplicar sucesivamente las transformaciones elementales

$$P_{s1}(-\alpha_1), P_{s2}(-\alpha_2), \dots, P_{sr}(-\alpha_r)$$

para reducir a cero todos los elementos de la fila s .

Definición 2.10.1 Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$. Llamamos rango por menores de la matriz A al número $\rho(A)$ que verifique:

- Existe en A un menor M de orden $\rho(A)$ tal que $\det(M) \neq 0$.
- El determinante de todo menor de A cuyo orden sea mayor que $\rho(A)$ es igual a cero.

Cualquier menor de A que verifique las condiciones anteriores recibe el nombre de menor principal.

Proposición 2.10.2 Si $\rho(A) = r$ y M es un menor principal de A , podemos, mediante transformaciones elementales de tipo I, reducir a cero toda fila de A que no figure en el menor M .

Demostración Es consecuencia inmediata de la definición de $\rho(A)$ y de la proposición 2.10.1.

Teorema 2.10.1 Si $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ y $\rho(A)$ es el rango por menores de la matriz A se verifica que $\text{rg}(A) = \rho(A)$.

Demostración Sea $\rho(A) = r$ y H un menor de orden r cuyo determinante sea distinto de cero (menor principal de A). Como las trasposiciones de filas o columnas son transformaciones elementales de tipo III que sólo afectan al signo de los determinantes, podemos suponer sin pérdida de generalidad que H esta formada por la intersección de las r primeras filas con las r primeras columnas de A . Es decir,

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Por la proposición anterior (2.10.2) La matriz A es equivalente por filas a la matriz,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $A \sim_f B$, se tiene que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r = \rho(A)$, como se quería demostrar. (Recuérdese que la *f.r.p.f.* de B es de la forma

$$B' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

y que, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r = \rho(A)$.)

2.11 Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.11.1 Recordaremos a continuación un conjunto de definiciones y notaciones relacionadas con los sistemas lineales.

1. Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es una conjunto de igualdades de la forma

$$S \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \quad (2.13)$$

2. Decimos que la n -upla, $\mathbf{s} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es *una solución* del sistema S si se verifica que

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n &= b_m \end{cases}$$

3. Diremos que el sistema S es *homogéneo* si $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.
4. Se dice que S es *compatible* si tiene alguna solución. En caso contrario se dice que es *incompatible*.
Un sistema compatible se dice que es *determinado* si tiene solución *única* e *indeterminado* si tiene más de una solución.
5. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de matriz de los coeficientes del sistema y a la matriz

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se le llama *matriz ampliada del sistema*.

Notaciones Según sea la más conveniente para efectuar algunas demostraciones, notaremos abreviadamente al sistema S de las siguientes formas:

- $S \equiv A\mathbf{x}^t = B$, donde A es la matriz de los coeficientes, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matriz de las incógnitas y $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t$ la columna de los términos independientes.
- $S \equiv A^*\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$, donde A^* es la matriz ampliada del sistema y \mathbf{x} , en este caso, es el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)$.
- $A_1\mathbf{x}_1 + A_2\mathbf{x}_2 + \dots + A_n\mathbf{x}_n = B$ donde A_j es la columna j -ésima de la matriz A y B la columna de los términos independientes.

Ejemplo Dado el sistema

$$S \equiv \begin{cases} 2x & - & y & + & 3z & = & 7 \\ -3x & + & 4y & + & 2z & = & 1 \end{cases}$$

una solución del mismo es la terna $(3, 2, 1)$.

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema son, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Las notaciones matriciales de S son:

$$S \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$S \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$S \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.11.2 Dados los sistema de ecuaciones lineales S y S' diremos que son equivalentes si ambos tienen las mismas soluciones. Es decir, el sistema S es equivalente al sistema S' si y sólo si toda solución de S lo es de S' y viceversa.

Proposición 2.11.1 Consideremos el sistema cuya matriz ampliada es A^* ,

$$S \equiv A^* \mathbf{x}^t = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)$$

y sea

$$S' \equiv \overline{A}^* \mathbf{x}^t = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)$$

un sistema cuya matriz ampliada \overline{A}^* es la *f.r.p.f.* de la matriz A^* . En estas condiciones se verifica que los sistemas S y S' son equivalentes.

Demostración Si \overline{A}^* es la *f.r.p.f.* de A^* , existe una matriz invertible P tal que $\overline{A}^* = PA^*$.

- Probemos en primer lugar que toda solución de S lo es de S' . En efecto, sea P una matriz de paso de A^* a \overline{A}^* y (s_1, s_2, \dots, s_n) una solución de S . Si $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n, -1)$, se tiene que

$$A^* \mathbf{s} = \mathbf{0} \implies P(A^* \mathbf{s}) = \mathbf{0} \implies (PA^*) \mathbf{s} = \mathbf{0} \implies \overline{A}^* \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

y, por consiguiente, (s_1, s_2, \dots, s_n) es solución de S' .

- Recíprocamente, si $(s'_1, s'_2, \dots, s'_n)$ es una solución de S' y $\mathbf{s}' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_n, -1)$, se tiene que

$$\overline{A}^* \mathbf{s}' = \mathbf{0} \implies P^{-1}(\overline{A}^* \mathbf{s}') = \mathbf{0} \implies (P^{-1} \overline{A}^*) \mathbf{s}' = \mathbf{0} \implies A^* \mathbf{s}' = \mathbf{0},$$

de donde $(s'_1, s'_2, \dots, s'_n)$ es solución de S .

Nota

1. Recordemos que transformaciones que conservan las soluciones de los sistemas; es decir, que transforman un sistema en otro equivalente son las siguientes:

- Sustitución una ecuación por ella más cualquier otra multiplicada por un escalar.
- Multiplicación de una ecuación por un escalar distinto de cero.
- Intercambio de ecuaciones.

Estas transformaciones equivalen a aplicar a la matriz ampliada A^* del sistema una transformación elemental por filas de los tipos I, II y III, respectivamente, lo que equivale, a su vez, a multiplicar, por la izquierda, la matriz A^* por una matriz elemental del tipo correspondiente. La proposición anterior es, por tanto, una demostración general ya que la matriz P es producto de matrices elementales de cualquiera de los tipos citados.

2. Se ha demostrado que si \overline{A}^* es la *f.r.p.f.* de A^* , los sistemas $S' \equiv \overline{A}^* \mathbf{x}^t = \mathbf{0}$ y $S \equiv A^* \mathbf{x}^t = \mathbf{0}$ son equivalentes y por ello el estudio de S lo haremos a través del sistema reducido S' .

Ejemplos Dos casos esencialmente distintos pueden darse: que la columna de los términos independientes contenga un pivote o que no lo contenga. Dichos casos serán analizados en los siguientes ejemplos.

1. La columna de los términos independientes contiene un pivote.

Considérese el sistema reducido

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En el lenguaje clásico, las incógnitas cuyos coeficientes son los pivotes se les llama *incógnitas principales* del sistema reducido y *secundarias* a las restantes.

Poniendo las incógnitas principales en el primer miembro se tiene:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = -4x_4 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Nótese que el sistema es *incompatible* ya que toda solución que satisfaga a las dos primeras ecuaciones no satisface a la tercera porque ésta no tiene solución.

2. La columna de los términos independientes no contiene pivotes

Pueden darse dos casos:

- (a) El número de pivotes es menor que el número de incógnitas.

Considérese el sistema cuya forma reducida es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las incógnitas principales son x_1 , x_2 y x_4 . El sistema es *compatible indeterminado* y la solución general del sistema viene dada por

$$\begin{cases} x_1 &= -2x_2 - 3x_4 + 4 \\ x_3 &= -2x_4 + 3 \end{cases}$$

o bien, en forma paramétrica,

$$x_1 = -2\lambda - 3\mu + 4,$$

$$x_2 = \lambda$$

$$x_3 = -2\mu + 3$$

$$x_4 = \mu$$

3. El número de pivotes es igual que el número de incógnitas.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, el sistema es *compatible determinado* y su solución es

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4.$$

Estos ejemplos nos van a ser útiles para la mejor comprensión del Teorema de Rouché-Frobenius que a continuación enunciamos.

Teorema 2.11.1 (ROUCHÉ-FROBENIUS) Sea $S \equiv A\mathbf{x}^t = B$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y sea $(A|B)$ la matriz ampliada del sistema. Se verifica que:

- S es incompatible si y sólo si $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|B)$.
 - S es compatible si y sólo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B)$.
- Pueden presentarse dos casos:
- S es compatible indeterminado si y sólo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) < n$.
 - S es compatible determinado si y sólo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$.

Demostración Dado el sistema S en la forma matricial

$$S \equiv A^* \mathbf{x}^t = \mathbf{0}, \quad (A^* = (A|B), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)),$$

consideremos el sistema reducido equivalente a S

$$S' \equiv \overline{A^*} \mathbf{x}^t = \mathbf{0}, \quad (\overline{A^*} = (\overline{A}|\overline{B}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)),$$

donde $\overline{A^*} = (\overline{A}|\overline{B})$ es la *f.r.p.f.* de la matriz $(A|B)$.

Como ambos sistemas son equivalentes estudiaremos la compatibilidad del sistema S' . Supongamos que $\text{rg}(\overline{A^*}) = r$. Esto quiere decir que la matriz $\overline{A^*}$ tiene exactamente r pivotes. Caben dos posibilidades:

1. La última columna de \overline{A}^* contiene un pivote. Dicha columna será de la forma

$$B' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^{(r)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aparecerá la ecuación $0 = 1$ que carece de solución por lo que el sistema es incompatible y esto ocurre si y sólo si

$$\text{rg}(A) = r - 1 < \text{rg}(A|B) = r.$$

(Ver ejemplo 1.)

2. La última columna de \overline{A}^* no contiene un pivote en cuyo caso será de la forma

$$B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, por consiguiente (ver ejemplo 2) S es compatible y esto ocurre si y sólo si

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = r.$$

Se pueden distinguir dos casos:

- (a) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = r < n$ en cuyo caso hay $r < n$ incógnitas principales y la solución dependerá de las restantes $n - r$ incógnitas y el sistema es *compatible indeterminado*.
 (b) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = r = n$. En este caso el sistema S' es de la forma

$$S' \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & b'_1 \\ & 1 & & & b'_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & b'_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

y su solución es $x_i = b'_i$ ($i = 1, \dots, n$). El sistema tiene solución única y es, por tanto, *compatible determinado*.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Definición 2.11.3 Llamamos sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas a un conjunto de m igualdades de la forma:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases}$$

Proposición 2.11.2 Si A es la matriz de los coeficientes del sistema se tiene que:

$$\begin{cases} \operatorname{rg}(A) = n, & S \text{ tiene sólo la solución trivial } \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \\ \operatorname{rg}(A) < n, & S \text{ es compatible indeterminado} \end{cases}$$

Demostración Nótese que los sistemas homogéneos siempre son compatibles ya que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A | B)$ por ser $B = \mathbf{0}$ y $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ (solución trivial) es siempre solución de S .
Teniendo en cuenta lo anterior, la proposición es consecuencia inmediata del teorema de Rouché-Frobenius